Практическое занятие №5.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Непрерывность функции.**

1. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва. Нарисовать эскизы графиков.

a) $y = \dfrac{3x+3}{2x+4}$; b) $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$ c) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x<0 \\ \sin x, & \text{если } 0 \le x < \pi/2 \\ x-\pi/2+1, & \text{если } x \ge \pi/2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример:

Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 0$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

◯ Найдем односторонние пределы в точке $x_0 = 0$. Слева от точки x_0 имеем $f(x) = 0$, поэтому

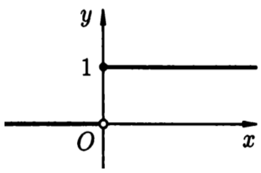
$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} 0 = 0.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} 1 = 1.$$

Кроме того, $f(x_0) = f(0) = 1$, откуда следует, что

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) \neq f(0) = \lim_{x\to 0+0} f(x).$$



Это означает, что в точке 0 не выполнены все условия непрерывности функции, но функция $f(x)$ непрерывна справа в этой точке.

Пример:

Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

◐ Функции $y = x$, $y = \sin x$ и $y = 1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} x = -\pi, \quad \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} \sin x = 0,$$
$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim_{x\to-\pi+0} f(x),$$

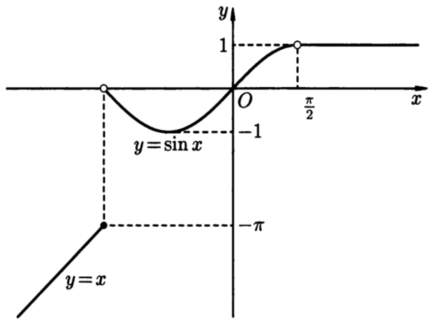
т. е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -\pi$ равен

$$\Delta f(-\pi) = \lim_{x\to-\pi+0} f(x) - \lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \pi.$$

Аналогично, для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$$

а значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \frac{\pi}{2}$ точка устранимого разрыва для функции $f(x)$.



Пример:

Установить характер разрыва функции $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ в точке $x_0 = 2$.

◐ Находим:

$$\lim_{x\to2-0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to2+0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty,$$

то есть функция в точке $x_0 = 2$ не имеет ни одного из односторонних пределов. Отсюда следует, что $x_0 = 2$ — точка разрыва 2-го рода. ●